DS n° 5 CB CCINP : correction

Exercice 1. Marché aléatoire sur le net (*CCINP 2017*)

Q1. Compléter la matrice T_4 correspondante à l'exemple n° 1 en remplaçant les $t_{i,j}$ par leurs valeurs.

Tout d'abord, dans les notations il est indiqué que $t_{i,i} = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ensuite, par définition $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$, $t_{i,j} = P_{A_n(j)}\big(A_{n+1}(i)\big)$ et il y a équiprobabilité parmi les liens disponibles, on a donc

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q2. Pour j de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} t_{i,j}$. Justifier soigneusement le résultat.

Soit $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Comme $\big(A_{n+1}(i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ est un système complet d'événements et que $P_{A_n(j)}$ est une probabilité, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{4} t_{i,j} = \sum_{i=1}^{4} P_{A_n(j)}\big(A_{n+1}(i)\big) = 1}$.

Q3. En précisant le théorème utilisé, montrer que :

$$p_{n+1}(1) = t_{1,1}p_n(1) + t_{1,2}p_n(2) + t_{1,3}p_n(3) + t_{1,4}p_n(4).$$

D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $\big(A_n(j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant 4}$, on a

$$\begin{aligned} p_{n+1}(1) &= P\big(A_{n+1}(1)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{4} P\big(A_{n+1}(1) \cap A_n(j)\big) && \textit{probabilités totales} \\ &= \sum_{j=1}^{4} P\big(A_n(j)\big) P_{A_n(j)}\big(A_{n+1}(1)\big) && \textit{probabilités composées} \\ &= \boxed{t_{1,1}p_n(1) + t_{1,2}p_n(2) + t_{1,3}p_n(3) + t_{1,4}p_n(4)}. && \text{cf } \textit{notations} \end{aligned}$$

Q4. Donner sans justification l'expression de $p_{n+1}(2)$, $p_{n+1}(3)$ et $p_{n+1}(4)$ en fonction des $p_n(j)$.

Pour tout $i \in \{2, 3, 4\}$, $\boxed{p_{n+1}(i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{4} p_n(j) t_{i,j}}$. (C'est simplement l'analogue de **Q3**.)

Q5. On note U_n le vecteur colonne :

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \\ p_n(4) \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_4 U_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En notant $T_4 = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$, on a

$$T_4 U_n = (t_{i,j})_{i,j} \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \\ p_n(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{4} t_{1,j} p_n(j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{4} t_{4,j} p_n(j) \end{pmatrix} \overset{\mathbf{Q3-Q4}}{=} \begin{pmatrix} p_{n+1}(1) \\ p_{n+1}(2) \\ p_{n+1}(3) \\ p_{n+1}(4) \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

Ainsi $\boxed{\text{pour } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = T_4 U_n}$.

Q6. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = T_4^n U_0$.

Il s'agit désormais directement d'un résultat de cours, c'est l'analogue pour les matrices d'une suite géométrique.
Au besoin, on pouvait aussi procéder via une récurrence facile comme suit.
Proposition à démontrer : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $U_n = T_4^n U_0$ ».
Initialisation : On a $T_4^0 U_0 = I_4 U_0 = U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a

$$U_{n+1} \overset{\mathbf{Q5}}{=} T_4 U_n \overset{\mathcal{P}(n)}{=} T_4 T_4^n U_0 = T_4^{n+1} U_0,$$

i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = T_4^n U_0}$.

Partie II - Étude d'un polynôme et de trois suites

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
On définit dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $S(X) = 4X^3 - 3X - 1$.

Q7. Vérifier que $\lambda = 1$ est une racine simple et $\mu = -\dfrac{1}{2}$ est une racine double de S.

Méthode 1 : On a $S'(X) = 12X^2 - 3$ donc $S(1) = 0$. Ensuite $S''(X) = 24X$ et en particulier $S'(1) = 9 \neq 0$. Par conséquent, $\boxed{1 \text{ est racine simple de } S}$.
De même, $S(\frac{-1}{2}) = 0$, $S'(\frac{-1}{2}) = 0$ et $S''(\frac{-1}{2}) = -12 \neq 0$ donc $\boxed{\frac{-1}{2} \text{ est racine double de } S}$.
Méthode 2 : On vérifie facilement que $4(X-1)(X+\frac{1}{2})^2 = S(X)$.
Comme $S(X) = (X-1)Q(X)$ avec Q un polynôme tel que $Q(1) \neq 0$, $\boxed{1 \text{ est racine simple de } S}$.
Comme $S(X) = (X+\frac{1}{2})^2 R(X)$ avec R un polynôme tel que $R(\frac{-1}{2}) \neq 0$, $\boxed{\frac{-1}{2} \text{ est racine double de } S}$.
Méthode 3 : On commence par remarquer que 1 est racine de S car $S(1) = 0$ puis on factorise sous la forme $S(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$. Par identification ou division euclidienne, on obtient la factorisation $S(X) = (X-1)(4X^2 + 4X + 1)$. On cherche alors les racines du trinôme du second degré : comme le discriminant est nul, on obtient une racine double qui vaut $\frac{-4}{2 \times 4} = \frac{-1}{2}$.

Q8. Soit n un entier naturel. Justifier l'existence d'un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ et d'un polynôme $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$X^n = S(X)Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n. \tag{1}$$

On ne cherchera pas à déterminer le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après $\boxed{\text{le théorème de la division euclidienne}}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^n = S(X)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(S)$. (On a effectué la division de X^n par $S(X)$.) Comme $\deg(S) = 3$, on a $\deg(R) \leqslant 2$ donc on peut écrire $R(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$ pour des réels α_n, β_n et γ_n. Autrement dit

$$\boxed{X^n = S(X)Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n \text{ avec } (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3}.$$

Q9. En remplaçant X par successivement λ et μ dans l'égalité (1), en déduire deux équations vérifiées par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

- D'abord, en remplaçant X par 1, on obtient $1^n = S(1)Q(1) + \alpha \times 1^2 + \beta_n \times 1 + \gamma_n$. Or d'après **Q7**, $S(1) = 0$ d'où $\boxed{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1}$.
- De même, $\left(\frac{-1}{2}\right)^n = S\left(\frac{-1}{2}\right)Q\left(\frac{-1}{2}\right) + \alpha\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \beta_n\left(\frac{-1}{2}\right) + \gamma_n$, d'où via **Q7**, $\boxed{\dfrac{\alpha_n}{4} - \dfrac{\beta_n}{2} + \gamma_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

Q10. En dérivant l'égalité (1) puis en remplaçant X par μ, en déduire une troisième équation vérifiée par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

En dérivant l'égalité de la question **Q8**, on obtient $nX^{n-1} = S'(X)Q(X) + S(X)Q'(X) + 2\alpha_n X + \beta_n$.

Comme par **Q7**, $S\left(\frac{-1}{2}\right) = S'\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$, on a $n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = 2\alpha_n\left(\frac{-1}{2}\right) + \beta_n$, *i.e.* $\boxed{\beta_n - \alpha_n = n\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n-1}}$.

Q11. Après résolution des équations précédemment obtenues, on admet que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{9}\left(4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ \beta_n = \dfrac{1}{9}\left(4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ \gamma_n = \dfrac{1}{9}\left(1 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \end{cases}.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ puis montrer que les trois suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites qu'on déterminera.

Comme $\left|\frac{-1}{2}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = 0$ donc par croissances comparées on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = 0}$.

Par somme de limites, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{4}{9},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \dfrac{4}{9} \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = \dfrac{1}{9}}$.

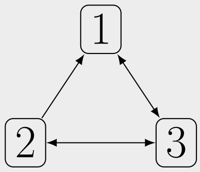
Partie III - Un deuxième exemple

On considère dans cette partie la matrice :

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Q12. En s'inspirant de l'exemple n° 1 de la partie **I**, dessiner le graphe dont la matrice de transition est la matrice T_3.

Il suffit de regarder les coefficients non nuls de chaque colonne : par exemple la dernière colonne indique que la page 3 (car colonne 3) pointe vers les pages 1 et 2 (car coefficients non nuls aux lignes 1 et 2). Le graphe dont la matrice de transition est T_3 est donc



Q13. Montrer que le polynôme caractéristique de T_3 est égal à $\dfrac{1}{4}S$.

Le polynôme caractéristique de T_3 est $\chi_{T_3}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - T_3)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \lambda & -1/2 \\ -1 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda & -1/2 \\ -1 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix} \overset{\text{lin. } L_1}{=} (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1/2 \\ -1 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ puis on développe selon la première colonne :

$$\chi_{T_3}(\lambda) = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 \\ 1/2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[\lambda(\lambda+1)+\frac{1}{4}\right] = (\lambda-1)\left(\lambda^2+\lambda+\frac{1}{4}\right) = (\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}S(\lambda).$$

On a donc bien obtenu $\boxed{\chi_{T_3} = \dfrac{1}{4}S}$.

Q14. Déterminer les valeurs propres de T_3.

Les valeurs propres de T_3 sont les racines du polynôme caractéristique donc, d'après la question précédente, celles de S. D'après **Q7**, on obtient $\boxed{\mathrm{Sp}(T_3) = \left\{1\,;\,\frac{-1}{2}\right\}}$ avec $m_1 = 1$ et $m_{-1/2} = 2$.

Q15. Pour chaque valeur propre, déterminer une base et la dimension du sous-espace propre associé.

- Déterminons d'abord l'espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{2}z = y \\ x + \frac{1}{2}y = z \end{cases} \overset{\times 2}{\iff} \begin{cases} y + z = 2x \\ z = 2y \\ 2x + y = 2z \end{cases}.$$

Après calculs (à détailler), on obtient $\begin{cases} z = 2y \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases}$ donc $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\}}$. Comme ce vecteur est non nul, il forme une base de l'espace propre et en particulier $\boxed{\dim(E_1) = 1}$.

- On procède de manière analogue avec la valeur propre $\frac{-1}{2}$ et on obtient $\boxed{E_{-1/2} = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}}$ et $\boxed{\dim(E_{-1/2}) = 1}$.

Q16. En précisant le théorème utilisé, montrer que la matrice T_3 n'est pas diagonalisable.

Comme $\frac{-1}{2}$ est valeur propre de T_3 de multiplicité 2 mais l'espace propre associé est de dimension $1 \neq 2$, $\boxed{\text{la matrice } T_3 \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Q17. Si $M(X) = m_0 + m_1 X + \ldots + m_r X^r$ désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on note $M(T_3)$ la matrice telle que $M(T_3) = m_0.\mathrm{I}_3 + m_1.T_3 + \ldots + m_r.T_3^r$. Calculer T_3^2 et T_3^3 puis montrer que $S(T_3) = O_3$ où O_3 désigne la matrice nulle carrée d'ordre 3.

On a $T_3^2 = \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ensuite, $T_3^3 = T_3 \times T_3^2 = \cdots = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Enfin,

$$S(T_3) = 4T_3^3 - 3T_3 - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{O_3}.$$

Q18. Comme dans la partie **I**, on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix}$. Pour simplifier, on note :

$$U_0 = \begin{pmatrix} p_0(1) \\ p_0(2) \\ p_0(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Que vaut la somme $a + b + c$?

$a + b + c = P(A_0(1)) + P(A_0(2)) + P(A_0(3)) = \boxed{1}$ car $(A_0(i))_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ forme un système complet d'événements.

Q19. On admet, comme dans la partie **I**, que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = T_3^n U_0$.
On admet également qu'en remplaçant dans l'égalité (1) de la question **Q8**, la variable X par la matrice T_3, on obtient, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité matricielle :

$$T_3^n = S(T_3)Q(T_3) + \alpha_n T_3^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n \mathrm{I}_3.$$

En déduire que :

$$T_3^n = \alpha_n T_3^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n \mathrm{I}_3.$$

Comme d'après la question **Q17**, $S(T_3) = O_3$, la relation admise donne immédiatement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_3^n = \alpha_n T_3^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n \mathrm{I}_3}.$$

Q20. Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression du vecteur U_n en fonction du triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ et du triplet (a, b, c).

Soit $n \in \mathbb{N}$. En réutilisant les calculs effectués en **Q17**, on a

$$\begin{aligned} U_n &= T_3^n U_0 \\ &\overset{\text{Q19}}{=} \alpha_n T_3^2 U_0 + \beta_n T_3 U_0 + \gamma_n U_0 \\ &\overset{\text{Q17}}{=} \frac{\alpha_n}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \frac{\beta_n}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \gamma_n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\alpha_n}{4}(2a + b + c) + \frac{\beta_n}{2}(b + c) + \gamma_n a \\ \frac{\alpha_n}{4}(2a + b) + \frac{\beta_n}{2} c + \gamma_n b \\ \frac{\alpha_n}{4}(2b + 3c) + \frac{\beta_n}{2}(2a + b) + \gamma_n c \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

*Remarque : On pourrait simplifier un peu ce résultat en utilisant la relation $a+b+c=1$ de **Q18** et les relations obtenues en **Q9** et **Q10**.*

Q21. Montrer que les trois suites $(p_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n(2))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n(3))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites qui seront déterminées.
On note, pour $i\in\{1,2,3\}$, $p_\infty(i)=\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(i)$.
Quelle interprétation peut-on donner aux limites $p_\infty(1)$, $p_\infty(2)$ et $p_\infty(3)$?

D'après la question précédente, $p_n(1)=\frac{\alpha_n}{4}(2a+b+c)+\frac{\beta_n}{2}(b+c)+\gamma_n a$. Or d'après **Q11**, les suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ convergent respectivement vers $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}$ et $\frac{1}{9}$. Ainsi la suite $\boxed{(p_n(1))_n \text{ converge}}$ vers $\dfrac{1}{9}(2a+b+c)+\dfrac{2}{9}(b+c)+\dfrac{1}{9}a=\dfrac{3a+3b+3c}{9}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$ car $a+b+c=1$ d'après **Q18**.
De même, on montre que $\boxed{(p_n(2))_n \text{ converge vers } \dfrac{2}{9} \text{ et } (p_n(3))_n \text{ vers } \dfrac{4}{9}}$.
Enfin, ces trois limites signifient que pour n très grand (qui tend vers l'infini), l'internaute se trouve sur la page 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$, sur la page 2 avec probabilité $\frac{2}{9}$, et sur la page 3 avec probabilité $\frac{4}{9}$.

Partie IV - Popularité d'une page

Un moteur de recherche consiste à classer les pages par pertinence. Un des algorithmes possible repose sur l'hypothèse qu'une page p est considérée plus populaire que d'autres pages elles-mêmes populaires lorsque ces dernières ont un lien vers la page p.

Q22. Parmi les 3 sites de l'exemple donné dans la partie **II**, quel(s) site(s) vous semble(nt) le(s) plus populaire(s) ? Vous devez justifier votre opinion.

Les pages 1 et 3 sont pointées par les deux autres pages alors que la page 2 n'est pointée qu'une fois donc $\boxed{\text{les pages 1 et 3 semblent les plus populaires}}$.

Dans la suite de cette partie, on reprend le deuxième exemple donné dans la partie **III**.
On mesure la popularité du site n° i par le réel $r(i)$ de l'intervalle $[0\,;1]$. Le site i est plus populaire que le site i' si $r(i)\geqslant r(i')$.
Un site qui émet par exemple deux liens ne transmet que pour moitié sa popularité aux sites vers lesquels il pointe.
On admet que le triplet $(r(1),r(2),r(3))$ vérifie le système :

$$\begin{cases} r(1)=\dfrac{1}{2}r(2)+\dfrac{1}{2}r(3) \\ r(2)=\dfrac{1}{2}r(3) \\ r(3)=r(1)+\dfrac{1}{2}r(2) \end{cases}. \tag{2}$$

Q23. On pose $R=\begin{pmatrix} r(1)\\ r(2)\\ r(3)\end{pmatrix}$.
Réécrire le système (2) à l'aide de la matrice T_3 et du vecteur colonne R.
Lorsque R n'est pas le vecteur nul, comment s'appelle R vis-à-vis de la matrice T_3 ?

La relation (2) équivaut à $\boxed{R=T_3R}$.
Si R est non nul, cela signifie que $\boxed{R \text{ est vecteur propre de } T_3 \text{ associé à la valeur propre } 1}$.

Q24. On pose $\|R\|_1 = |r(1)| + |r(2)| + |r(3)|$.
Déterminer un vecteur R avec $r(1) > 0$ puis calculer $\|R\|_1$.

D'après **Q15**, $E_1 = \text{Vect}\{\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\}$. Comme pour tout $i \in \{1\,;2\,;3\}$, $r(i) \in [0\,;1]$, on peut prendre par exemple $\boxed{R = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}}$. Dans ce cas $\|R\|_1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \boxed{\frac{9}{4}}$.

Q25. Déterminer les coordonnées du vecteur $R' = \dfrac{1}{\|R\|_1}R$.
Justifier sans calcul que R' est encore solution du système (2).

On a $R' = \dfrac{1}{9/4}R = \dfrac{4}{9}R = \boxed{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}}$. Comme $R' \in \text{Vect}\{\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\} = E_1$, les coordonnées de $\boxed{R' \text{ vérifient } (2)}$.

Q26. Déduire de R' l'ordre des sites du plus populaire au moins populaire.

D'après la question précédente $\boxed{r(3) > r(1) > r(2)}$, *i.e.* le site le plus populaire est le 3 puis le 1 et enfin le 2 est le moins populaire.

Exercice 2. (*d'après CCINP TSI 2021*)
On rappelle que pour x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.
On considère la fonction $g\colon x \longmapsto x^x$ et on pose $I =]0\,;+\infty[$ son ensemble de définition.

Partie I - Étude de la fonction g

Q27. Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I.

- On a $\boxed{g(1) = 1^1 = 1}$.
- On écrit, pour tout $x \in I$, $g(x) = \mathrm{e}^{x \ln x}$. Ainsi la $\boxed{\text{fonction } g \text{ est dérivable sur } I}$ comme composée et produit de fonctions qui le sont, le logarithme étant bien défini pour $x > 0$.

Q28. Dresser le tableau de variations de g et préciser ses limites aux bornes de I.

Pour tout $x \in I$, par dérivation de composée et de produit :

$$g'(x) = (x \ln x)' \,\mathrm{e}^{x \ln x} = (\ln(x) + 1)\,\mathrm{e}^{x \ln x}\,.$$

Comme $\mathrm{e}^{x \ln x} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\ln(x) + 1$. Or $\ln(x) + 1 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
La limite en $+\infty$ ne pose pas de problème. Pour la limite en 0, on a par croissances comparées $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \mathrm{e}^0 = 1$. On obtient ainsi :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$ 1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Q29. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g.

On sait que l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = g'(1)(x-1) + g(1)$.
Comme $g(1) = 1$ et $g'(1) = 1$, on obtient $y = 1 \times (x-1) + 1$, *i.e.* $\boxed{y = x}$.

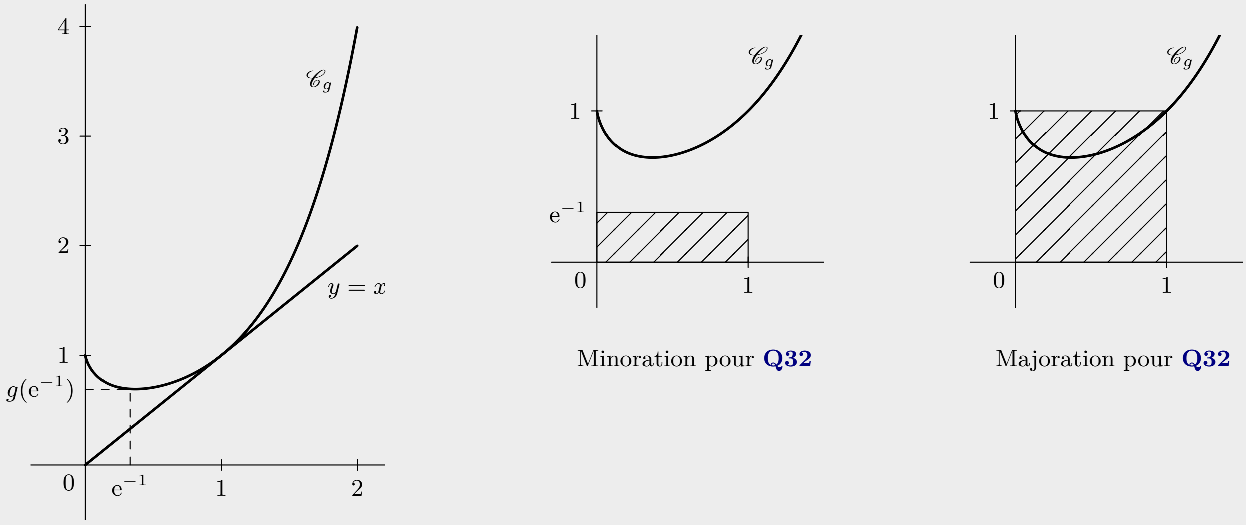
Q30. On admet que $g(x) \underset{x \to 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)$. Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g.

Comme la tangente a pour équation $y = x$, pour déterminer sa position relative avec la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g, on étude le signe de $g(x) - x$ au voisinage de 1. Or, par le résultat admis dans l'énoncé :

$$g(x) - x \underset{x \to 1}{=} (x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big) \geqslant 0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_g \text{ est au-dessus de sa tangente}}$ au voisinage de 1.

Q31. Représenter sur l'intervalle $]0\,;2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente sur le même graphique.
On donne $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$ et $g(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0{,}69$.



Minoration pour **Q32** — Majoration pour **Q32**

Q32. En utilisant le graphique, justifier l'encadrement $\mathrm{e}^{-1} < \int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x < 1$.

Remarquons d'abord que cette intégrale est bien convergente puisque d'après **Q28**, g est prolongeable par continuité en 0.

Les inégalités souhaitées sont illustrées ci-dessus.

Remarque : On aurait aussi pu procéder par calculs : d'après le tableau de variations, on a pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $g(\mathrm{e}^{-1}) \leqslant g(x) \leqslant 1$. *Or* $g(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} > \mathrm{e}^{-1}$, *d'où* $\mathrm{e}^{-1} < g(x) \leqslant 1$. *En intégrant sur* $[0\,;1]$, *on obtient* $\boxed{\mathrm{e}^{-1} < \int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x < 1}$ *(la dernière inégalité est clairement stricte d'après le graphique).*

Remarque : dans tous les cas, il aurait été plus naturel de minorer par $g(\mathrm{e}^{-1})$ *que par* e^{-1}.

Partie II - Un calcul d'intégrales

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

Q34. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $x \longmapsto x^n(\ln x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Comme $n > 0$, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^n(\ln x)^k = 0$. Autrement dit la fonction $\boxed{x \longmapsto x^n(\ln x)^k \text{ est prolongeable par continuité en 0 en lui donnant pour valeur 0}}$.

Dans la suite, on notera la fonction prolongée de la même façon.

Q35. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^k \,\mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $x \longmapsto x^n(\ln x)^k$ est continue sur $]0\,;1]$. Soit $X \in]0\,;1]$.

On pose $\begin{cases} u = (\ln x)^k \\ v' = x^n \end{cases}$ donc $\begin{cases} u' = \frac{k}{x}(\ln x)^{k-1} \\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[X\,;1]$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_X^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^k\right]_X^1 - \int_X^1 \frac{k}{x}(\ln x)^{k-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - \frac{X^{n+1}}{n+1}(\ln X)^k - \frac{k}{n+1}\int_X^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'une part, d'après la question précédente, le premier terme tend vers 0 lorsque X tend vers 0. D'autre part, toujours d'après la question précédente, la fonction dans l'intégrale du membre de droite est continue sur $[0\,;1]$ (car $k-1 \in \mathbb{N}$ puisque $k \in \mathbb{N}^*$) donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x$ est convergente, *i.e.* par définition de la convergence, $\displaystyle\lim_{X\to 0}\int_X^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x$.
Finalement, on a obtenu

$$\boxed{\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x}.$$

Remarque : vu l'enchaînement des questions, on pourrait faire directement l'intégration par parties sur $[0\,;1]$ *puisque tout converge même si cela n'est pas totalement dans l'esprit du programme de TSI.*

Q36. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire par récurrence sur k, que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n,k) = (0,0)$.

Propriété à démontrer : Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(k)$: « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$ ».
Initialisation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{Q33}}{=} \frac{1}{n+1}$ et d'autre part $\displaystyle\frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \frac{1}{n+1}$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k+1}\,\mathrm{d}x &\overset{\textbf{Q35}}{=} -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\mathscr{P}(k)}{=} -\frac{k+1}{n+1}\times\frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}}\end{aligned}$$

i.e. $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}}.$$

- Lorsque $(n,k) = (0,0)$, on a d'une part $\displaystyle\int_0^1 x^0(\ln x)^0\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$ et d'autre par $\displaystyle\frac{(-1)^0 0!}{(0+1)^{0+1}} = 1$ donc $\boxed{\text{l'égalité reste vraie pour } (n,k) = (0,0)}$.

Partie III - Expression de $\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une série

Q37. Rappeler le développement en série entière de $z \mapsto \mathrm{e}^z$ ainsi que son rayon de convergence.

D'après le cours, $\boxed{\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ avec } R = +\infty}$.

Q38. Justifier que $\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!} \,\mathrm{d}x$.

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!}\right) \mathrm{d}x & \qquad \textit{d'après la question précédente} \\
= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!} \,\mathrm{d}x} & \qquad \textit{par intégration terme à terme}
\end{aligned}$$

Remarque : cette dernière égalité n'est en fait pas totalement justifiée par le théorème d'intégration terme à terme (mais on ne peut pas faire mieux avec le programme de TSI) car ce dernier est valable pour intégrer sur un intervalle $[a\,;b]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Or ici le DSE est valable sur $I =]0\,;+\infty[$ mais $[0\,;1] \not\subset I$.

Q39. En déduire l'égalité $\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x & \qquad \textit{d'après la question précédente} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \times \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} & \qquad \textit{par } \textbf{\textit{Q36}} \\
&= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}}
\end{aligned}$$

Q40. À l'aide du critère spécial des séries alternées, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ est convergente.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ de façon qu'on s'intéresse à la série $\sum (-1)^n u_n$.
Tout d'abord, on a immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Montrons maintenant que la suite (u_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 \leqslant n+1 < n+2$ d'où, en élevant à la puissance $n+1$, l'inégalité $(n+1)^{n+1} < (n+2)^{n+1}$ et ce dernier terme peut être majoré par $(n+2)^{n+2}$. En passant à l'inverse, il vient alors $u_n > u_{n+1}$, *i.e.* la suite (u_n) est (strictement) décroissante.
Par conséquent, comme la suite (u_n) est positive, décroissante et de la limite nulle, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente, *i.e.* $\boxed{\text{la série } \sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \text{ est convergente}}$.

Q41. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ le reste au rang p de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ et on admet l'inégalité $|R_p| \leqslant \dfrac{1}{(p+2)^{p+2}}$.

Dans le langage Python, écrire une fonction `approximation(e)` qui prend en paramètre un nombre réel strictement positif `e` et qui renvoie un nombre réel représentant l'approximation de $\displaystyle\int_0^1 x^x \, dx$ dont l'erreur maximale commise est `e`.

Donner ensuite une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 x^x \, dx$ à $\dfrac{1}{27}$ près.

D'après la question précédente, la somme partielle $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ est une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 x^x \, dx$ avec une erreur valant $|R_p|$. On aura donc l'approximation souhaitée dès que $|R_p| \leqslant$ `e` et donc a fortiori dès que $\dfrac{1}{(p+2)^{p+2}} \leqslant$ `e` d'après le résultat admis dans l'énoncé.

On peut donc proposer la fonction suivante dans laquelle on procède à un calcul classique de somme avec un test à chaque étape pour savoir si on a atteint la précision suffisante :

```python
def approximation(e: float) -> float:
    n = 0
    somme = (-1)**n / (n+1)**(n+1)   # Valeur de S_0
    while 1/(n+2)**(n+2) > e:
        n = n + 1
        somme = somme + (-1)**n / (n+1)**(n+1)
    return somme
```

On peut aussi décomposer notre démarche en deux fonctions, l'une pour calculer la somme et l'autre pour trouver l'approximation recherchée.

```python
def somme(p: int) -> float:
    """ Calcul de S_p. """
    total = 0
    for n in range(p+1):
        total = total + (-1)**n / (n+1)**(n+1)
    return total

def approximation(e: float) -> float:
    p = 0
    while 1/(p+2)**(p+2) > e:
        p = p + 1
    return somme(p)
```

- On a $\dfrac{1}{(p+2)^{p+2}} \leqslant \dfrac{1}{27} \iff p+2 \geqslant 3 \iff p \geqslant 1$ donc S_1 est une valeur approchée de l'intégrale à $\frac{1}{27}$ près où

$$S_1 = \frac{(-1)^0 0!}{(0+1)^{0+1}} + \frac{(-1)^1 1!}{(1+1)^{1+1}} = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

Remarque : l'appel `approximation(1/27)` *donne bien 0,75 comme valeur approchée à $\frac{1}{27}$ près. Par ailleurs, il n'existe pas d'expression simple de la valeur de cette intégrale, juste la valeur approchée* 0,783 430.